CHAPITRE V

HISTOIRE DE TRIANGLES

Ou une brève histoire de la trigonométrie.

Retour au sommaire

HISTOIRE DE TRIANGLES

Le mot « trigonométrie » vient du grec « mesure des triangles » mais ce sont les astronomes babyloniens qui sont à l'origine de l'outil. Lorsqu'ils observaient le ciel, ils ne pouvaient pas mesurer des distances entre les étoiles, les planètes, mais seulement des angles. Ils ont donc créé un outil qui permet de passer des mesures d'angles aux mesures des distances.

Un exemple de résolution de triangle d'après un manuscrit du XVème pour le calcul de la hauteur d'une tour.

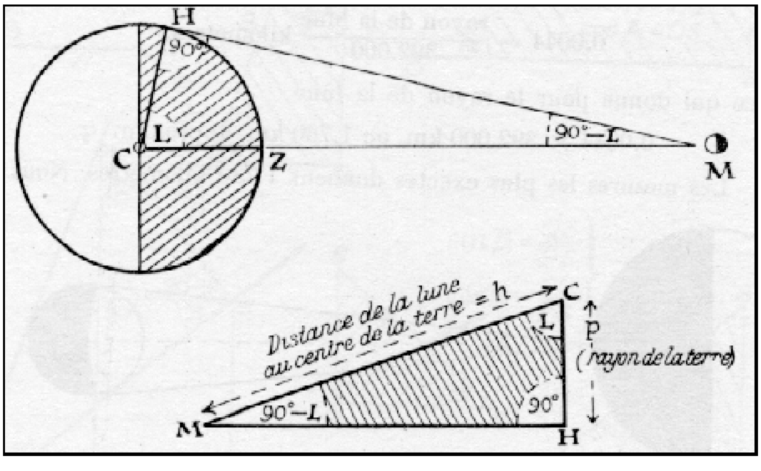
Retour au sommaire

I -) Les tables de cordes.

L'une des tâches de l'astronomie fut donc l'établissement de tables permettant le passage de la mesure des angles à celle des arcs et des cordes de cercle.
Les premières tables de cordes, celles d'**Hipparque** ($II^{ème}$ siècle av. J.C.), ont été perdues. Celui – ci est ainsi considéré comme l'ancêtre de la trigonométrie. A la suite des **Babyloniens**, il a introduit la division du cercle en 360°. L'unité d'angle d'Hipparque était le degré qu'il partageait en 60 minutes de 60 secondes chacune, comme faisaient jadis les Babyloniens !
Les tables de **Ptolémée** (mort en 168) établissaient le passage entre les longueurs des cordes et celles des valeurs d'arcs.
Dans son traité, « L'Almageste », Ptolémée expose toute la trigonométrie de l'antiquité. Il explique comment calculer des longueurs de cordes et publie une table très complète. Ces tables sont les premiers exemples de fonctions dans l'histoire des mathématiques. C'est à cette époque que les Grecs prennent l'habitude de diviser le cercle en 360°.

II -) HIPPARQUE (190 ? - 125 av. J. - C.).

Astronome grec considéré comme le fondateur de l'astronomie de position. A la suite d'un immense travail d'observations des astres, il a établi les premières tables de cordes. Grâce à ses tables, il découvrit que l'axe terrestre n'était pas fixe. On nomme ce phénomène la 'précession des équinoxes'. C'est un mouvement conique très lent, de période 26 000 ans, effectué par l'axe de rotation terrestre autour d'une position moyenne.
Il réalisa le premier catalogue d'étoiles et posa le principe de la projection stéréographique. Ses principales observations furent effectuées à Rhodes.
Hipparque a calculé que la distance Terre - Lune est à peu près de 400 000 km. La méthode employée est essentiellement la même que pour trouver la hauteur d'une falaise en mesurant simultanément son altitude en deux endroits dont on connaît la distance.



L'angle $\hat{L}$ est estimé à 89,06°, donc :

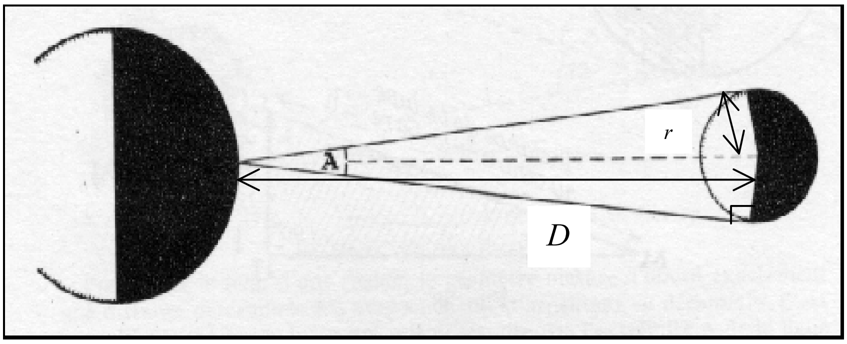
$$\cos \hat{L} = \frac{\text{rayon de la Terre}}{\text{distance Terre - Lune}} \qquad \text{ou encore :} \qquad \cos \hat{L} = \frac{CH}{CM}$$

$$CM = \frac{6400}{\cos 89{,}06°} \qquad \text{soit :} \qquad CM = 390\,200 \text{ km}$$

La distance moyenne connue aujourd'hui est d'environ 384 400 km. Il est remarquable de constater que l'erreur commise par Hipparque est inférieure à 2 % !

Retour au sommaire

Une fois déterminée la distance Terre - Lune, il lui fut aisé d'estimer le rayon et la circonférence de l'astre de la nuit.



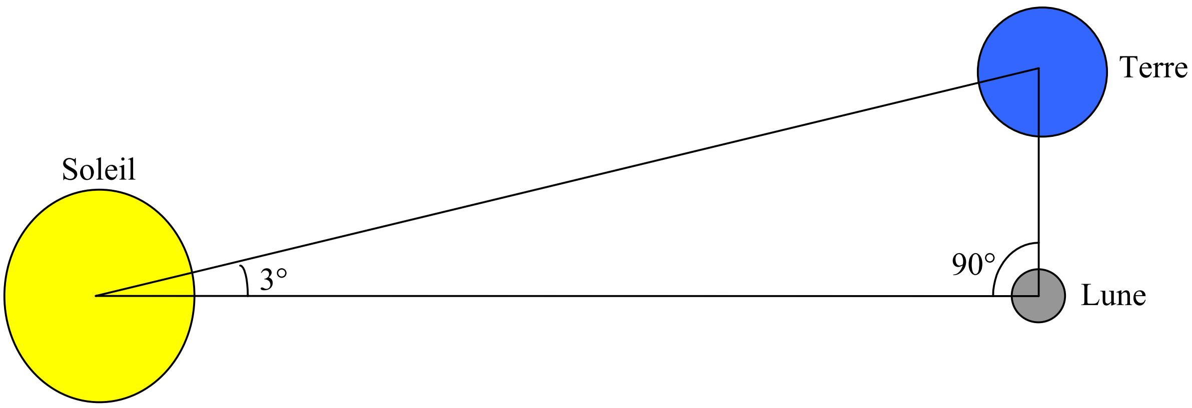
L'angle $\hat{A}$ étant égal à un - demi degré, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{2}\hat{A}\right) = \frac{\text{rayon Lune}}{\text{distance T - L}} \quad \text{soit} \quad \sin(0{,}25°) = \frac{r}{D} \quad \text{donc} \quad r = D \times \sin 0{,}25° = 1703 \text{ km}$$

$$\text{Circonférence} = 2\,\pi\, r \quad \text{soit} \quad C = 2 \times 3{,}14 \times 1703 = 10\,695 \text{ km.}$$

III -) ARISTARQUE (310 - 230 av. J. - C.).

Un autre grand astronome grec. Il émit, le premier, l'hypothèse de la rotation de la Terre sur elle – même et autour du Soleil.
Pour mesurer la distance de la Terre au Soleil, il observa l'angle entre la Lune, telle qu'on la voit dès le matin, le Soleil et la Terre quand la moitié de la surface de la Lune est visible (demi – Lune).



A l'aide des instruments imparfaits dont il disposait, il trouva que l'angle $\hat{S}$, dans le triangle TSL, était de 3°. Il n'avait pas de tables de rapports d'angles et utilisa donc une très ingénieuse, mais pour nous fort longue, application de la géométrie d'Euclide. Il constata alors que la distance TS est dix – huit à vingt fois la distance TL. Non content de cette méthode, il recourut à une seconde méthode pour contrôler ce résultat.
Grâce à la trigonométrie, le problème d'Aristarque est désormais accessible à n'importe quel élève de 3$^{\text{ème}}$. En effet :

$$\mathbf{sin}\,3° = \frac{TL}{TS} \qquad \text{d'où} \qquad TS = \frac{390\,200}{\sin 3°}$$

Retour au sommaire

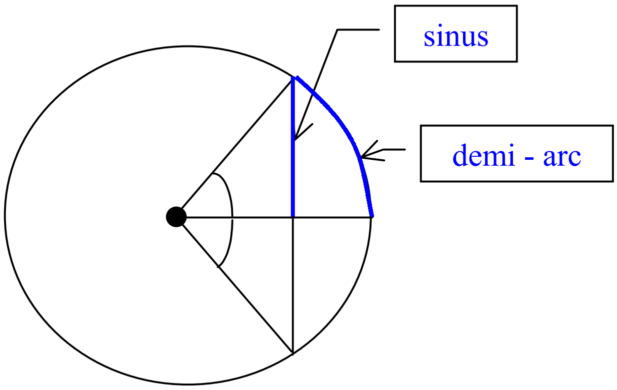
On trouve ainsi une valeur de 7 455 678 km environ. Actuellement, nous savons que la distance Terre – Soleil est d'environ 149 000 000 km !
L'erreur importante commise par Aristarque provient de la faible précision de ses instruments. Un niveau élevé de précision en astronomie suppose un degré élevé du développement technique de la mécanique.

Le mérite d'Aristarque est d'avoir montré que le Soleil est distant d'*au –moins* 7 500 000 km de la Terre, ce qui est un progrès remarquable dans les connaissances humaines liées à l'Univers.

IV -) Tables des sinus.

Plus tard, un mathématicien indien, nommé **Aryabhata**, eut la bonne idée de ne considérer que la ***demi–corde de l'angle double*** plutôt que la ***corde de l'angle***.

Les indiens ont ainsi remplacé les tables de cordes par celles de **sinus**.
Le nom indien, « *jiva* » (« corde d'arc ») en sanscrit, donné à la demi–corde de l'angle double donna « *jiba* » (« poche, repli de vêtement ») en arabe puis « sinus » (« sein, demi - corde ») en latin.

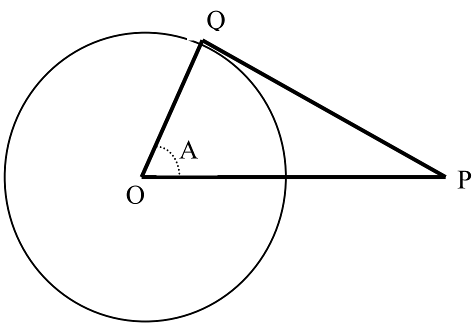


Al – Khwarizmi (IX^{ème} – X^{ème} siècles) fut le premier mathématicien arabe à établir des tables de sinus. Abu Al – Wafa (X^{ème} siècle) ou Nasir Al – Din Al – Tusi en établirent d'autres toujours plus précises.

V -) Tangente.

Juste après, Habash Al – Hasib (« le calculateur »), originaire d'Egypte (fin IX^{ème} – début X^{ème}), inventa la **tangente** qui est l'outil idéal pour mesurer des hauteurs.

Le mot « tangente » vient du latin '*tangere*', toucher. Ce mot est employé aussi bien pour désigner un rapport d'angle que pour désigner la droite qui ne touche le cercle qu'en un seul point.



Dans le triangle OPQ rectangle en Q, on a :

$$\tan \hat{A} = \frac{PQ}{OQ}$$

Si le rayon du cercle est égal à l'unité (OQ = 1 unité de longueur), alors :

$$\tan \hat{A} = PQ$$

Retour au sommaire

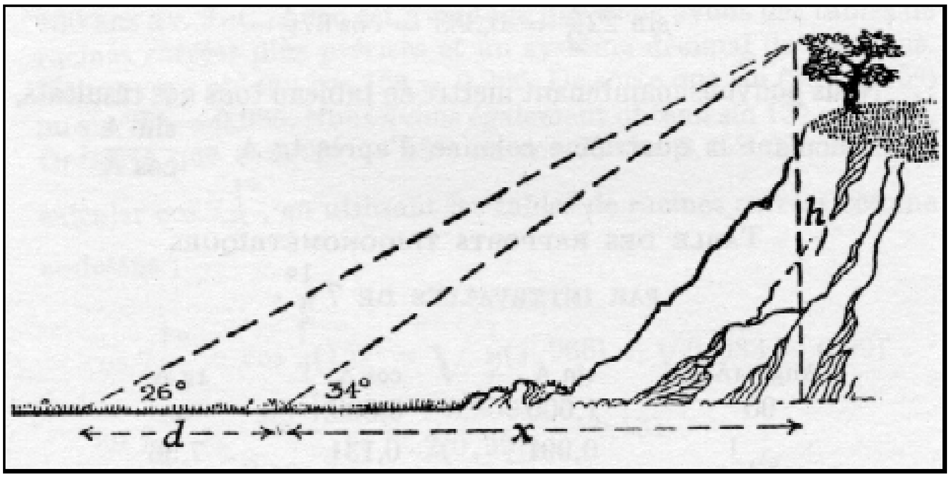
VI -) Et l'Occident ?

A partir du XII^{ème} siècle, beaucoup d'ouvrages mathématiques sont traduits en latin, ce qui permet aux connaissances mathématiques de pénétrer l'Europe.
Descartes (1596 – 1650) montre que l'on peut utiliser les sinus pour calculer la déviation d'un rayon lumineux qui passe d'un milieu dans un autre (réfraction de la lumière). Désormais, on utilise la trigonométrie dans toutes les branches de la physique.
Les notations « sin, cos et tan » sont introduites par Albert Girard (1595 – 1632) mais c'est l'allemand Régiomontanus, au 15ème siècle, qui est le créateur du mot « sinus ».

VII -) Application.

Méthode employée pour mesurer la hauteur d'une falaise dont le pied est inaccessible.

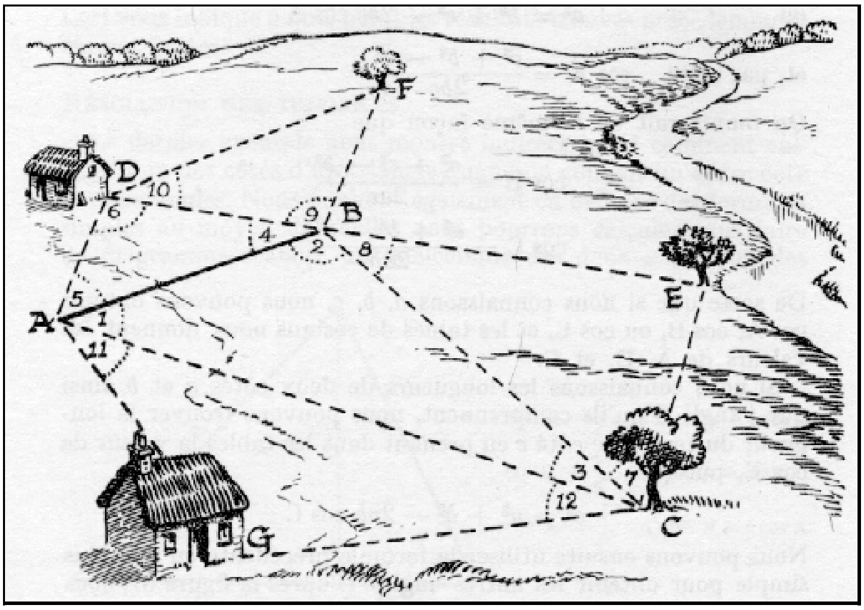
Le principal profit tiré de l'outil trigonométrique est l'arpentage sur une échelle adaptée à l'ampleur des travaux géographiques. La méthode employée pour la falaise ci-dessous illustre bien cet immense progrès.



Le pied étant inaccessible, il suffit de mesurer un angle avec un objet au sommet, de s'éloigner d'une distance quelconque en ligne droite et de mesurer un second angle.
Dans l'exemple pris, les angles sont de 34° et 26°, la distance *d* mesurée est de 64 mètres. Le problème est aisément résolu grâce aux relations dans le triangle quelconque ou grâce à la trigonométrie classique (ce qui est un peu plus long).
Les réponses sont : environ 113 m pour la hauteur *h* et 167 m pour la longueur *x*.

Retour au sommaire

VIII -) Principe de la triangulation.



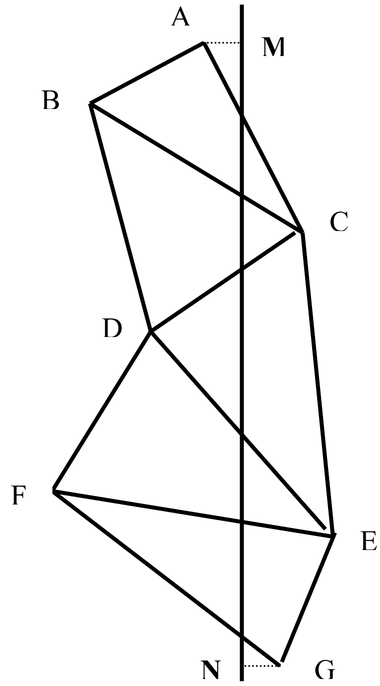
Pour lever le plan d'une région, le géomètre mesure d'abord exactement une distance déterminée AB avec sa chaîne d'arpenteur ou un décamètre. De l'extrémité A, il repère avec son théodolite l'angle (1) entre B et C, C étant un objet bien visible tel qu'un arbre. Puis, se déplaçant en B, il repère l'angle (2) entre A et C. Il connaît maintenant un côté (AB) et deux angles du triangle ABC. De sorte qu'il peut calculer les longueurs de [BC] et [AC] au moyen de la formule des sinus. Ces deux procédés peuvent être employés tour à tour pour obtenir les côtés des triangles BEC et AGC. A cet effet, il repère d'abord l'arbre E et les angles (8) et (7). En continuant ainsi, il repère dans d'autres directions les fermes G, D et l'arbre F, achevant ainsi le canevas de la région considérée.

IX -) La mesure du méridien par DELAMBRE et MECHAIN.

En 1669, l'astronome français Picard mesura pour la première fois un arc de méridien entre Paris et Amiens. Jusqu'au milieu du 17ème siècle, on croyait la Terre sphérique. En 1672, l'astronome Richer, envoyé en mission à Cayenne, s'aperçut que son horloge, qui battait la seconde à Paris, retardait de deux minutes par jour. Il put interpréter ce résultat en l'attribuant au fait que la Terre n'est pas ronde mais aplatie aux pôles.
Il fallait donc vérifier qu'un arc de 1° du méridien terrestre n'a pas la même mesure au voisinage du pôle ou près de l'équateur. Ceci fut fait en 1736 par Clairaut et Maupertuis en Laponie et par Bouguer et Lacondamine au Pérou.
En 1790, la Révolution française décida de créer un système universel de poids et mesures : le système métrique. L'unité de longueur choisie, appelée mètre (du grec « métron », mesure), fut la dix - millionième partie du quart du méridien terrestre. Les astronomes Delambre et Méchain furent chargés de mesurer sur le terrain l'arc du méridien allant de Dunkerque à Barcelone, les extrémités de cet arc, situées au niveau de la mer et de part et d'autre du 45ème parallèle, ayant des latitudes bien connues.

Retour au sommaire

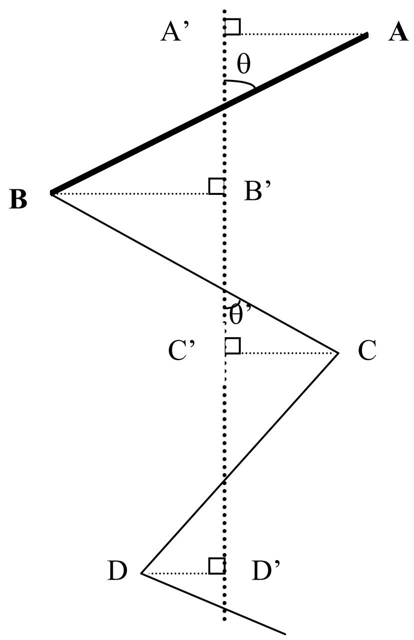
Mais, sur le terrain, la mesure précise des angles était plus facile à faire que la mesure des longueurs. Aussi furent – ils amenés à considérer une chaîne de triangles, situés le long de l'arc méridien et ayant pour sommet des points remarquables (hauteurs, châteaux, …). A partir de la mesure d'une seule longueur (par exemple, la longueur AB d'un segment horizontal) et de tous les angles de la chaîne, ils purent calculer toutes les autres longueurs en utilisant la formule des sinus.
Connaissant enfin les angles déterminés par le méridien et les côtés des triangles, il restait à calculer MN comme somme de projections.



Les deux distances de base utilisées par Delambre et Méchain allaient de Lieusaint à Melun (12 km) et de Vernet à Salces, près de Perpignan (16 km) (mesures faites à 30 cm près). Leurs travaux durèrent sept ans (de 1772 à 1779).
Plusieurs années de travaux, parsemés d'obstacles, furent également nécessaires pour instaurer le système métrique qui sera bientôt adopté par le monde entier.

Exemple d'activité :

Calculer la longueur A'D' lorsque l'on connaît la base AB.



Il faut connaître l'angle θ de la direction AB avec celle du méridien A'D'. Cet angle est l'azimut géodésique mesuré sur le terrain à l'aide d'un théodolite.

Pour calculer les côtés AC, BC, CD, BD, … dans la chaîne de triangles, il faut aussi mesurer au théodolite les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$, … en chaque point A, B, C, D, …

On sait calculer la longueur de la projection orthogonale A'B' de (AB) sur (A'D') :

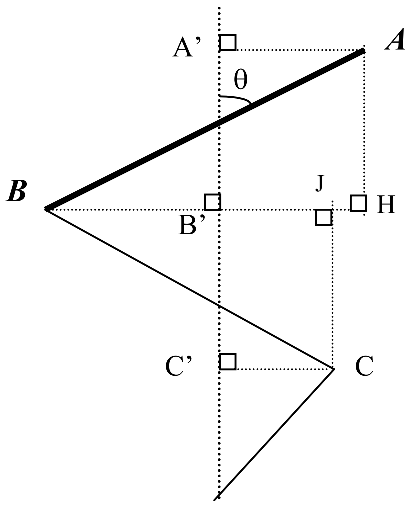
$$A'B' = AB \cos \theta.$$

La somme A'B' + B'C' + C'D' donne la longueur A'D' du méridien.

Retour au sommaire

Exercice de triangulation.

Niveau : terminale B.E.P. ou Bac Pro Industriels.



Objectif : calculer la longueur A′C′.
Après les relevés sur le terrain, à l'aide d'un théodolite et d'un décamètre, on connaît les mesures suivantes :

$\theta = 47°$; AB = 120 m ; $\widehat{ABC} = 61°$; $\widehat{BAC} = 43°$ et $\widehat{ACB} = 76°$.

Calculer, au centimètre près :
1°) la longueur A′B′ = AH ;
2°) la longueur BC dans le triangle ABC ;
3°) la longueur B′C′ = JC ;
4°) la longueur A′C′.

Exemple d'activité de triangulation sur le terrain.

Niveau : terminale B.E.P. ou Bac Pro Industriels.

Pré-requis : formule des sinus.

Cette séance de mesure requiert un matériel spécifique sous la forme d'un **théodolite** simple (voir à ce sujet le catalogue du fournisseur Pierron). On peut également utiliser, en option, un **clinomètre** (petit appareil de mesure d'angles dans le plan vertical utilisé dans les travaux publics ou forestiers). Le **décamètre** reste, quant à lui, indispensable et il faut prévoir également un piquet de visée (grand bâton peint en blanc par exemple).

L'activité peut alors donner lieu à de véritables relevés topographiques (une base au sol et des mesures d'angles) sur le terrain, en petits groupes d'élèves. L'exploitation se poursuit, en classe, par le calcul de toutes les dimensions inconnues restant à déterminer.

Le travail préalable, pour le professeur, consiste en un repérage, parfois fastidieux, d'un lieux adéquat, c'est – à – dire assez dégagé (sans trop d'obstacles naturels ou artificiels). Il faut, ensuite, marquer les bases au sol (peinture en bombe) et effectuer soi – même les relevés !

Commentaires.
Je profite d'une séance en demi – classes qui me permet de faire deux groupes de six élèves. J'ai prévu, pour chaque groupe, des mesures différentes (groupes I et II). Lors d'une séance précédente, j'ai présenté à la classe le petit théodolite avec quelques recommandations. Par petits groupes de six, les élèves vont pouvoir, à tour de rôle, faire au moins un relevé. L'entraide est nécessaire pour les visée et surveiller les erreurs.

Retour au sommaire

Munis de leurs feuilles de consignes, les élèves sont lâchés en autonomie, ils ont 25 minutes pour réaliser leurs relevés.
L'autre groupe est en classe et fait des exercices, ils iront faire leurs relevés au retour de leurs camarades.
Les résultats peuvent être exploités ultérieurement, lors d'une séance en classe entière où deux groupes pourront ainsi confronter leurs résultats.
Le problème le plus délicat reste évidemment la précision des relevés d'angles.

Les deux activités présentées dans la suite sont les documents qui ont été remis aux élèves. La base AB mesure 8 mètres, la base AJ mesure 6 mètres.
Les relevés ayant été réalisées au sein de mon établissement, il convient évidemment de les adapter à toute autre configuration !

Activité de triangulation (groupe I).

Objectifs : à partir de la mesure d'une seule base fixe au sol, AB, il s'agit, grâce à des relevés d'angles effectués au théodolite, de trouver des longueurs inconnues.

Travail de relevés sur le terrain.

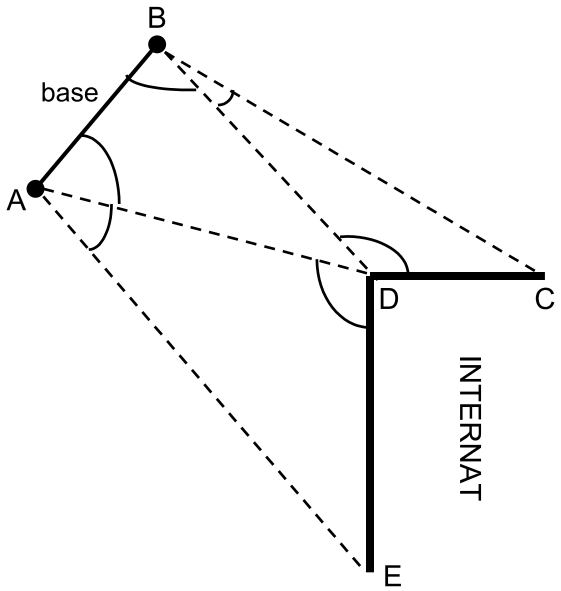
→ Mesurer la base AB (au cm près).
→ Depuis le point A, mesurer les angles :

$\widehat{BAD}$ = ……….° et $\widehat{DAE}$ = ……….°
DH étant la hauteur de l'internat en D,

mesurer l'angle : $\widehat{HAD}$ = ……….°
→ Depuis le point B, mesurer les angles :

$\widehat{DBA}$ = ……….° et $\widehat{DBC}$ = ……….°
→ Depuis le point D, mesurer les angles :

$\widehat{BDC}$ = ……….° et $\widehat{ADE}$ = ……….°



Travail à réaliser en classe.

→ En déduire la mesure des angles :

$\widehat{ADB}$ = ……….° ; $\widehat{BCD}$ = ……….° et $\widehat{AED}$ = ……….°

→ En utilisant la formule des sinus, calculer les longueurs, arrondies au cm : AD ; BD ; BC ; DC ; DE et AE. Calculer la mesure de DH, hauteur de l'internat (ADH est un triangle rectangle en D).

→ Sachant que l'on utilise une échelle de 1/500$^{\text{ème}}$ sur le plan de masse du lycée, calculer les dimensions DC ; DE et DH, arrondies au mm, que l'on devra utiliser pour tracer le plan de l'internat.

Retour au sommaire

Activité de triangulation (groupe II).

<u>Objectifs</u> : à partir de la mesure d'une seule base fixe au sol, AJ, il s'agit, grâce à des relevés d'angles effectués au théodolite, de trouver des longueurs inconnues.

Travail de relevés sur le terrain.

→ Mesurer la base AJ (au cm près).

→ Depuis le point A, mesurer les angles :

$\widehat{EAF}$ = ………. ° et $\widehat{JAF}$ = ……….°

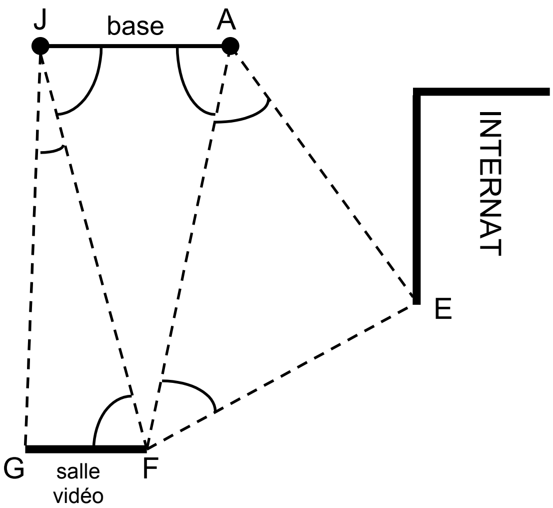
EK étant la hauteur de l'internat en E, mesurer l'angle : $\widehat{KAE}$ = ……….°

→ Depuis le point J, mesurer les angles :

$\widehat{AJF}$ = ……….° et $\widehat{GJF}$ = ……….°

→ Depuis le point F, mesurer les angles :

$\widehat{AFE}$ = ……….° et $\widehat{JFG}$ = ……….°



Travail à réaliser en classe.

→ En déduire la mesure des angles :

$\widehat{AEF}$ = ……….° ; $\widehat{AFJ}$ = ……….° et $\widehat{JGF}$ = ……….°

→ En utilisant la formule des sinus, calculer les longueurs, arrondies au cm : AF ; AE ; EF ; JF ; JG et GF. Calculer la mesure de EK, hauteur de l'internat (AEK est un triangle rectangle en E).

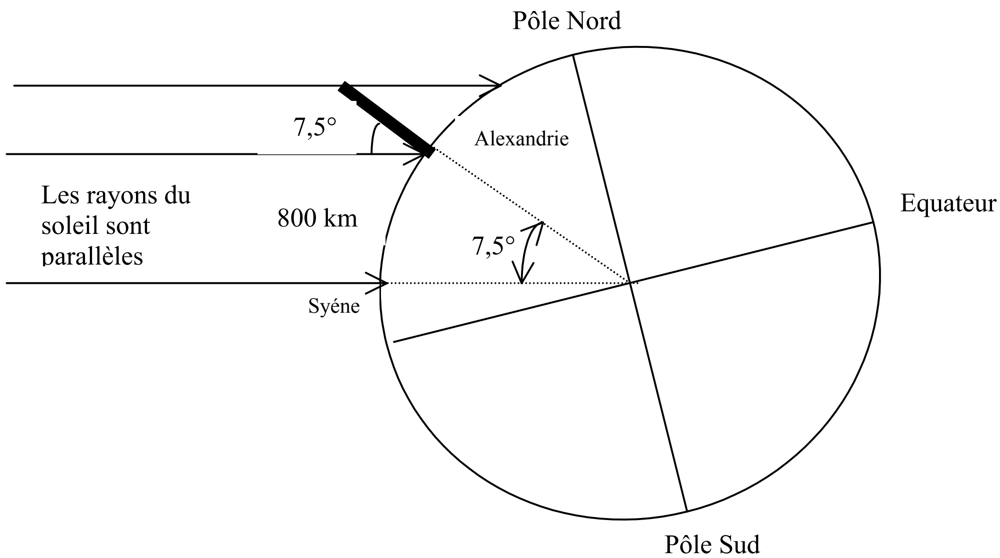
→ Sachant que l'on utilise une échelle de 1/500ème sur le plan de masse du lycée, calculer les dimensions EF ; GF et EK, arrondies au mm, que l'on devra utiliser pour tracer le plan des bâtiments.

Retour au sommaire

X -) ERATOSTHENE ou les dimensions de la Terre.

L'histoire d'Eratosthène, bien que n'empruntant pas l'outil trigonométrique, mérite d'être rapportée car elle est exemplaire du génie que peut déployer un homme. Il s'agissait de relier des faits, indépendants en apparence, et d'en tirer un résultat inédit (Cf. le chapitre III sur Thalès).

Eratosthène (275 – 194 av. J-C) était bibliothécaire à Alexandrie. Comme tel, il disposait de rapports concernant tous les événements importants en relation avec le calendrier. Il apprit que, un certain jour de l'année, le soleil se réfléchit à midi dans l'eau d'un puits profond près de Syéne (aujourd'hui Assouan), non loin de la première cataracte du Nil. La réflexion se produisait donc quand le soleil était au zénith, c'est à dire à la verticale. Le même jour, à Alexandrie, à 800 km au nord de Syéne, l'ombre d'un pilier, à midi, plaçait le soleil à 7,5° au sud de la verticale.
Voici un schéma qui rend compte de la situation (les dimensions sont volontairement exagérées) :



La première conclusion qui s'impose est que la Terre n'est pas plate ! Ensuite, si on considère les rayons du soleil parallèles, ceci veut dire que les rayons unissant Alexandrie et Syéne (arc de 800 km) forment un angle de 7,5° au centre de la Terre. Or, 7,5° est contenu environ 50 fois dans 360°. Donc, la circonférence de la Terre est :

$$50 \times 800 = 40000 \text{ km.}$$

Le rayon de la Terre est lui de : $R = \dfrac{40000}{2 \times \pi}$, soit environ 6369 km.

La valeur de π employée était celle donnée par Archimède, soit $\dfrac{22}{7}$. Les mesures de distance se faisaient en 'stadia'.
Il est remarquable de noter qu'à partir de ces données, Eratosthène fit une estimation de la circonférence terrestre en faisant une erreur de 80 km par rapport aux mesures actuelles ! L'humanité découvrait ainsi combien était grande la partie de la Terre restante à découvrir.

Retour au sommaire

XI -) Conclusion.

Grâce à l'outil trigonométrique, il est possible de donner une suite à l'activité de mesure de hauteur d'un objet (arbre, tour, …) situé en extérieur proposée dans le chapitre III (Thalès) au paragraphe III.
Cet outil est, à mes yeux, l'un des plus puissants qui permette d'établir un lien entre un enseignement théorique en classe, l'histoire et la réalité du terrain.

Retour au sommaire